EJERCICIOS CANTIDAD DE MOVIMIENTO

ENUNCIADO 1

Una placa de masa 0.048 kg, longitud 0.135 m, cuya arista superior está fija y alrededor de la cuál puede girar a modo de bisagra, recibe un chorro de agua de 2 mm de diámetro , el cual incide horizontalmente a 0.05 m por debajo del punto fijo. Hallar el ángulo con respecto a la vertical que tomará la placa en la posición de equilibrio. Para determinar el caudal contamos con un recipiente de 1.5 l que tardó en llenarse 40 segundos.

RESOLUCIÓN 1

Basándonos en la **ecuación de continuidad**, y considerando movimiento permanente, lo cual nos llevará a que $\left(\int_{V=C} \frac{\partial}{\partial t} \rho v dV\right) dt = 0$, tomamos como volumen de estudio el comprendido entre los puntos inmediatamente anteriores al contacto entre el chorro y la placa y los inmediatamente posteriores:

$$\vec{N}_2 - \vec{N}_1 = \vec{R} + \vec{G}$$

$$\overrightarrow{N_1} = \rho Q \overrightarrow{v_1} + P_1 \vec{S}_1$$

$$\overrightarrow{N_2} = \rho Q \overrightarrow{v_2} + P_2 \vec{S}_2$$

$$\rho = Densidad\ del\ agua = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

$$Q = Caudal\ del\ chorro = \frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{40} = 3.75 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^3}{s}$$

$$\overrightarrow{S_i} = Vector\ normal\ a\ la\ superficie\ i\ de\ modulo\ S_i$$

$$P_i = Presión\ de\ la\ sección\ i = P_{atm}$$

$$\vec{N}_i = Impulso\ en\ la\ sección\ i$$

$$\vec{v}_i = Velocidad\ del\ fluido\ en\ la\ sección\ i = \frac{Q}{S_i}$$

$$\vec{R} = Fuerza\ de\ reacción\ de\ la\ placa\ sobre\ el\ fluido$$

Hipótesis:

1. Se va a considerar despreciable el peso del chorro en este problema $\vec{G} = 0$.
2. La placa desvía el agua en la dirección de ella misma por ello, $M_{N_2} = 0$
3. Tratamos el problema en presiones relativas, así que, $P_{atm} = 0$

En el equilibrio, el momento producido por la acción del fluido sobre la placa debe igualar al momento producido por el peso $M_{\vec{W}}$. Los momentos se tomarán en el punto de giro de la bisagra.

Cuando se establezca el equilibrio se cumplirá que la suma de los momentos en el punto fijo es nula. Es importante indicar que $-\vec{R}$ será la acción del fluido sobre la placa.

$$\sum M_P = 0$$

$$\sum M_P = M_{-\vec{R}} + M_{\vec{W}} = M_{\vec{N}_1} - M_{\vec{N}_2} + M_{\vec{W}}$$

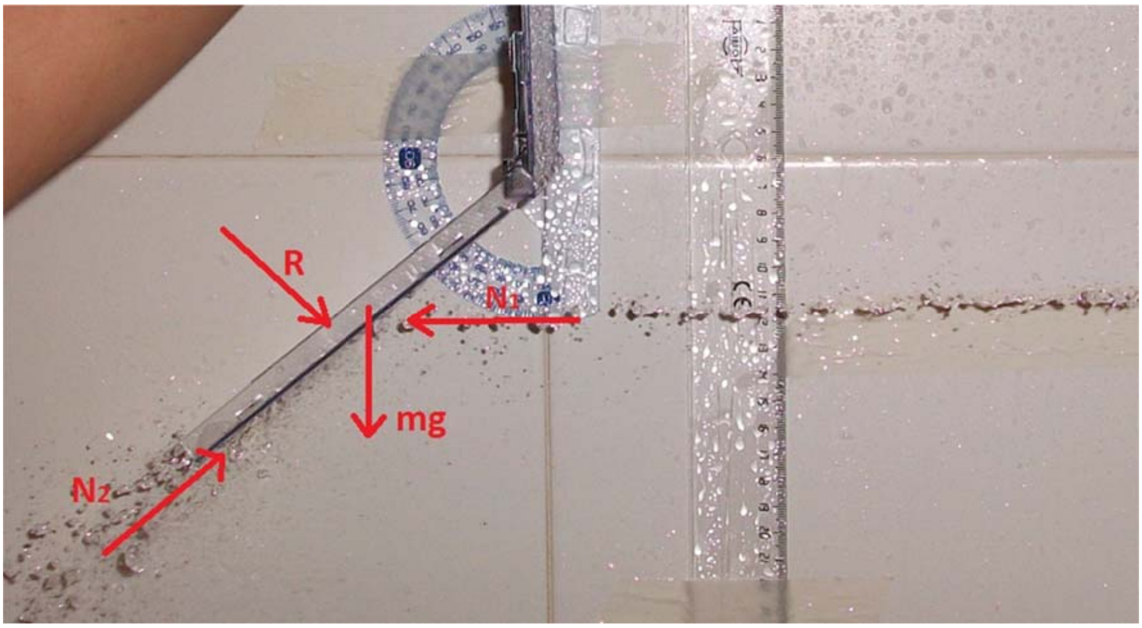
Finalmente tendremos:

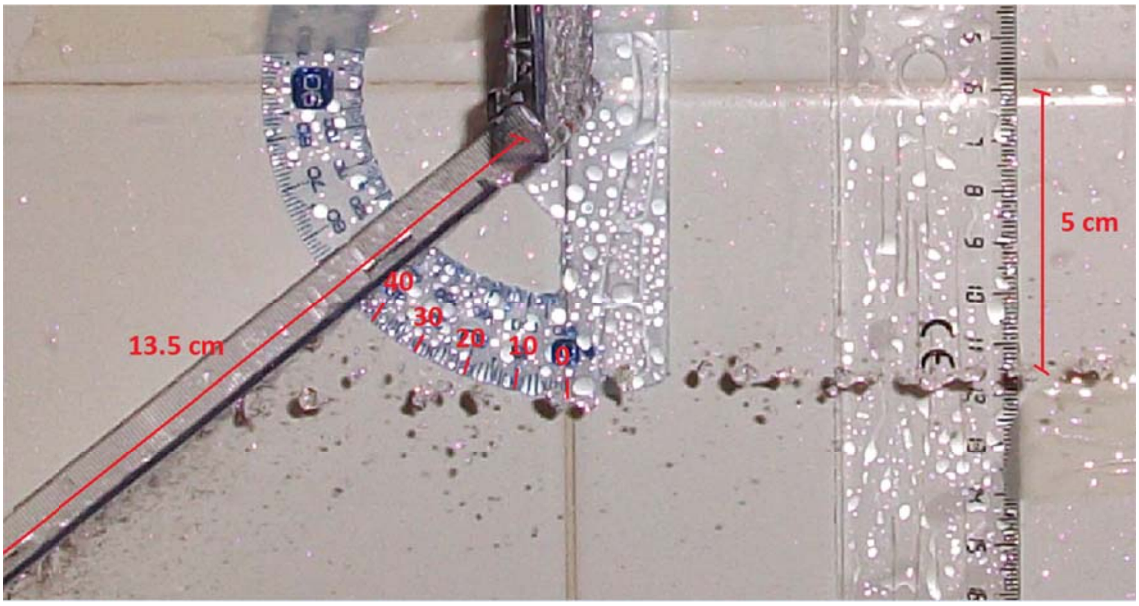
$$\rho Q v_1[0.05] - mg\frac{l}{2}sen\alpha = 0$$

$$1000 \cdot \frac{Q^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot D^2}[0.05] - mg\frac{l}{2}sen\alpha = 0$$

$$1000 \cdot \frac{(3.75 \cdot 10^{-5})^2}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2}[0.05] - 0.048 \cdot 9.81 \cdot \frac{0.135}{2}sen\alpha = 0$$

$$\alpha = 44.7°$$





A pesar de los distintos rozamientos, de la irregularidad del chorro y de los errores en la realización del experimento podemos observar la sorprendente exactitud de los cálculos

ENUNCIADO 2

Un disco de 0.005 kg de masa tiene su movimiento restringido a un grado de libertad definido por el movimiento de su centro sobre una recta vertical, estando éste en posición horizontal. Seis chorros inciden sobre el disco por su parte de abajo cada uno de ellos con un diámetro de 2 mm. Para determinar el caudal contamos con un recipiente de 1.5 L que tardó en llenarse 16.5 segundos. Hallar la altura desde el inicio de los chorros hasta el disco en el punto de equilibrio.

NOTA: Podemos suponer que los 6 chorros equivalen a un solo chorro aplicado en el centro del disco de diámetro 12mm

RESOLUCIÓN 2

Estudiaremos la situación sobre un plano vertical que pase por el eje ya que dada la simetría del problema lo expuesto sobre este plano genérico sucederá en todos los demás.

Basándonos en la **ecuación de continuidad**, y considerando movimiento permanente, lo cual nos llevará a que $\left(\int_{V=C} \frac{\partial}{\partial t} \rho v dV\right) dt = 0$, tomamos como volumen de estudio el comprendido entre el comienzo del chorro y los puntos inmediatamente posteriores al contacto entre el agua y el disco:

$$\vec{N}_2 - \vec{N}_1 + \vec{N}_3 = \vec{R} + \vec{G}$$

$$\overrightarrow{N_1} = \rho Q \overrightarrow{v_1} + P_1 \vec{S}_1$$

$$\overrightarrow{N_2} = \rho Q\overrightarrow{v_2} + P_2\vec{S}_2$$

$$\overrightarrow{N_3} = \rho Q\overrightarrow{v_3} + P_3\vec{S}_3$$

$$\rho = Densidad\ del\ agua = 1000\frac{kg}{m^3}$$

$$Q = Caudal\ del\ chorro = \frac{1.5\cdot 10^{-3}}{16.5} = 9\cdot 10^{-5}\ \frac{m^3}{s}$$

$$\overrightarrow{S_i} = Vector\ normal\ a\ la\ superficie\ i\ de\ modulo\ S_i$$

$$P_i = Presión\ de\ la\ sección\ i = P_{atm}$$

$$\vec{N}_i = Impulso\ en\ la\ sección\ i$$

$$\vec{v}_i = Velocidad\ del\ fluido\ en\ la\ sección\ i = \frac{Q_i}{S_i}$$

$$\vec{R} = Fuerza\ de\ reacción\ de\ la\ placa\ sobre\ el\ fluido$$

Hipótesis:

- El disco desvía el agua en la dirección de él mismo por ello, $\overrightarrow{\mathrm{N}_2} + \overrightarrow{N_3} = 0$
- Tratamos el problema en presiones relativas, así que, $P_{atm} = 0$
- El caudal Q es constante y por la ecuación de continuidad: $Q_3 + Q_2 = Q_1$

$$v_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{9\cdot 10^{-5}}{\frac{\pi}{4}0.012^2} = 0.79\frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_1 = 0.79\,\vec{j}$$

Como siempre es importante indicar que $-\vec{R}$ será la acción del fluido sobre el disco. Por ello estableciendo el equilibrio en el disco concluimos que $R = P$. Aplicando todo lo dicho calcularemos el peso del fluido en la sección de control:

$$\vec{G} = -P + \rho Q\vec{v}_1 = -m\vec{g} + 1000\cdot(\rho S_1 v_1\overrightarrow{v_1}) =$$

$$= \left(0.005\cdot 9.81 + 1000\cdot\left(\frac{\pi\cdot 0.012^2}{4}\right)\cdot 0.79^2\right)\cdot\vec{j}$$

$$\vec{G} = 0.112\,\vec{j}$$

A continuación hallaremos el tiempo que invierte peso de fluido en recorrer el espacio desde el comienzo del chorro hasta que incide en el disco, para lo cual calcularemos el volumen de dos maneras distintas y así poder despejar el tiempo:

$$Volumen = \int Sdh = \int Svdt = Q\int dt = Qt$$

$$Volumen = \frac{\frac{Peso\ del\ fluido}{g}}{Densidad} = \frac{G}{\gamma}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$t = \frac{Volumen}{Q} = \frac{\frac{G}{1000g}}{(\frac{\pi}{4}) \cdot D^2 \cdot v_1} = \frac{\frac{0.112}{1000g}}{(\frac{\pi}{4}) \cdot 0.012^2 \cdot 0.79} = 0.136\ s$$

Aplicando la ecuación para movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y sabiendo que $h_0 = 0$, calcularemos la altura de equilibrio del disco:

$$h = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.79 \cdot 0.136 - \frac{1}{2} 9.8 \cdot 0.136^2 = 1.67\ cm$$